JOURNAL OF EDUCATION, SCIENCE AND HEALTH – JESH
Revista de Educação, Ciência e Saúde
DOI: https://www.doi.org/10.52832/jesh.v3i1.178
Home page: www.jeshjournal.com.br
e-ISSN: 2763-6119

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E GEOMETRIA DINÂMICA: UM NOVO OLHAR AO TEOREMA DE VIVIANI PARA O ENSINO MÉDIO

HISTORY OF MATHEMATICS AND DYNAMIC GEOMETRY: A NEW LOOK AT VIVIANI'S THEOREM FOR HIGH SCHOOL

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA GEOMETRÍA DINÁMICA: UNA NUEVA MIRADA AL TEOREMA DE VIVIANI EN EL BACHILLERATO

Iara Martins Coelho[1]; Lucas Santos Teixeira[2]; Luis Andrés Castillo B.[3]; Ivonne C. Sánchez S.[4]

[1]Licencianda de Matemática na Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias, Tocantins, Brasil. [2]Licenciando em Matemática na Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias, Tocantins, Brasil. [3]Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (UFPA), Belém, Pará, Brasil. [4]Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (UFPA), Belém, Pará, Brasil.
*Autor correspondente: martins.coelho@mail.uft.edu.br.

Recebido: 24/12/2022 | **Aprovado**: 12/02/2023 | **Publicado**: 26/02/2023

Resumo: Na atualidade o uso de História da Matemática e das Tecnologias Digitais, tem sido tema de interesse na comunidade internacional, bem como, no âmbito nacional. Neste trabalho temos por objetivo descrever as possibilidades de utilizar o software GeoGebra para um novo ponto de vista da demonstração do Teorema de Viviani, a ideia principal é promover uma educação ativa para estudantes do ensino médio. Para isto, nos fundamentamos numa pesquisa qualitativa, de abordagem bibliográfica tendo como fonte primária tratados antigos de matemática. Foram discutidas as formas de uso do GeoGebra no ensino da matemática. Para finalizar as considerações finais ao respeito da proposta para dinamizar a representação e exploração de um teorema que contribui ao desenvolvimento da matemática, em específico para mobilizar conteúdos da geometria escolar.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Tecnologias Digitais. Demonstração. Atividades.

Abstract: Currently, the use of History of Mathematics and Digital Technologies has been a topic of interest in the international community, as well as at the national level. In this work we aim to describe the possibilities of using the GeoGebra software for a new point of view of the demonstration of Viviani's Theorem, the main idea is to promote an active education for high school students. For this, we base ourselves on a qualitative research, with a bibliographical approach, having as primary source ancient mathematical treatises. The ways of using GeoGebra in mathematics teaching were discussed. Finally, the final considerations regarding the proposal to streamline the representation and exploration of a theorem that contributes to the development of mathematics, specifically to mobilize contents of school geometry.

Keywords: Teaching Geometry. Digital Technologies. Demonstration. Activities.

Resumen:
Actualmente, el uso de la Historia de las Matemáticas y las Tecnologías Digitales ha sido un tema de interés en la comunidad internacional, así como a nivel nacional. En este trabajo pretendemos describir las posibilidades de utilizar el software GeoGebra para un nuevo punto de vista de la demostración del Teorema de Viviani, la idea principal es promover una educación activa para los estudiantes de secundaria. Para ello, nos basamos en una investigación cualitativa, con enfoque bibliográfico, teniendo como fuente primaria los tratados matemáticos antiguos. Se discutieron las formas de utilizar GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, las consideraciones finales respecto a la propuesta de agilizar la representación y exploración de un teorema que contribuya al desarrollo de las matemáticas, específicamente para movilizar contenidos de la geometría escolar.

Palabras-clave: Enseñanza de la Geometría. Tecnologías digitales. Demostración. Actividades.

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O uso de Fontes Primárias, como tratados históricos do desenvolvimento da matemática, no ensino da Matemática tem sido uma abordagem de interesse de pesquisa e didática na comunidade internacional (Maanen, 1997; Isoda & Aoyama, 2000; Jankvist, 2014; Thomsen & Jankvist, 2019). Logo, tal interesse ultrapassou as fronteiras, tendo uma ampla expansão de trabalhos desenvolvidos no contexto brasileiro, especificamente no uso de tratados matemáticos dos séculos XVI e XVII (Pontes *et al.*, 2021; Pereira, 2022; Junior *et al.*, 2022).

Neste sentido, o desenvolvimento de atividades baseadas em informações históricas, como tratados antigos, em sala de aula permitem aos estudantes aprender matemática conectada com as necessidades de "contextualização, problematização, interdisciplinaridade, transversalidade", e ainda mais quando a atividade de aprendizagem pode ser mediada com apoio das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) (Mendes, 2015), é dizer, as tecnologias tem o efeito catalisador nas ações pedagógicas da História da Matemática na Sala de Aula (Kántor & Tóth, 2016; Jankvist & Geraniou, 2019).

Dependendo do tipo de tecnologia digital e da forma de inserir a mesma na prática pedagógica dos professores, os estudantes podem enfrentar determinadas dificuldades (Carvalho, 2021). Neste trabalho, consideramos que um tipo de tecnologias digital ideal para mediar as atividades baseadas em tratados antigos ou de outras fontes, são aqueles que podem auxiliar os alunos a traduzir e interpretar conceitos por meio de várias representações (Isoda, 2002), entre estes, temos os: *Graphing Software* (*Algebraic Expresser*, *Function Probe*, *Calculus Unlimited*); Software de Geometria Dinâmica (DGS) (Jankvist & Geraniou, 2021; Meadows & Caniglia, 2021), como o Cabri (Baki & Guven, 2008), Geometer's Sketchpad (Dennis & Confrey, 1997); GeoGebra (Zengin, 2018; Thomsen, 2021; Sousa, 2021); Planilhas (Excel, Lotus, etc.); Sistemas de álgebra computacional (CAS) (Hašek & Zahradník, 2015).

Nas atividades com tratados tratado antigos mediadas por tecnologias digitais, temos por um lado, aquelas que focalizam em instrumentos nos referidos tratados e abordam tanto a matemática na construção deste tipo de artefato (Pereira & Alves, 2019; Brito da Silva & Batista, 2022), bem como, aquela implícita no seu manuseio (Alves, 2019). Por outro lado, atividades que pretendem permitir um olhar desde uma perspectiva mais atual, por médio destas tecnologias, de problemas ou demonstrações nesses tratados.

Desse novo olhar, temos o exemplo: quando combinam o sistema de álgebra computacional *wxMaxima* e do software de matemática dinâmica GeoGebra para resolver um problema geométrico sobre cônicas e lugar geométrico de um livro didático do século XVIII. Continuando esse raciocínio (Hašek & Zahradník, 2015), quando se descreve o uso GeoGebra para (re)explorar, uma validação do teorema de Pitágoras, para dinamizar a demonstração planteada pelo Sócrates, registrada na obra intitulada *The Pythagorean Proposition* de autoria de *Elisha Scott Loomis*, publicada no ano de 1968 (Sánchez & Castillo, 2022).

Pela perspectiva exposta, nosso objetivo é descrever as possibilidades de utilizar o software GeoGebra para um novo ponto de vista da demonstração do Teorema de Viviani, a ideia principal é promover uma educação ativa para estudantes do ensino médio. Para alcançar nosso objetivo, primeiramente, procuramos saber o contexto sobre o teorema de Vincenzo Viviani (1659). Depois, compreender de que modos é possível usar o

GeoGebra me salda de aula. Logo, descrever abordagem da validação desse teorema com GeoGebra, para fecharmos com nossas considerações finais.

2 VINCENZO VIVIANI E SEU TEOREMA

O matemático Vincenzo Viviani (1622-1703), nasceu em Florença, 5 de abril de 1622. Segundo registros históricos foi constatado que Viviani (Figura 1) estudou com os jesuítas em Florença e estudou matemática com Clemente Settimi da Scuole Pie. O Settimi, que ficou impressionado com a inteligência e habilidade de Viviani, e o apresentou a Galileu, e a descrição de Settimi de seu aluno levou à sua apresentação ao Grão-Duque em 1638. O Grão-Duque forneceu 50 escudos por ano ao jovem para fornecer-lhe conhecimentos matemáticos, livros, e mais tarde ele conseguiu que Viviani fosse companheiro e pupilo de Galileu, um arranjo que começou no final de 1639 e durou até a morte de Galileu. Os anos com Galileu substituíram a formação universitária.

Figura 1 – Vincenzo Viviani (1622 -1703).

Fonte: MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viviani

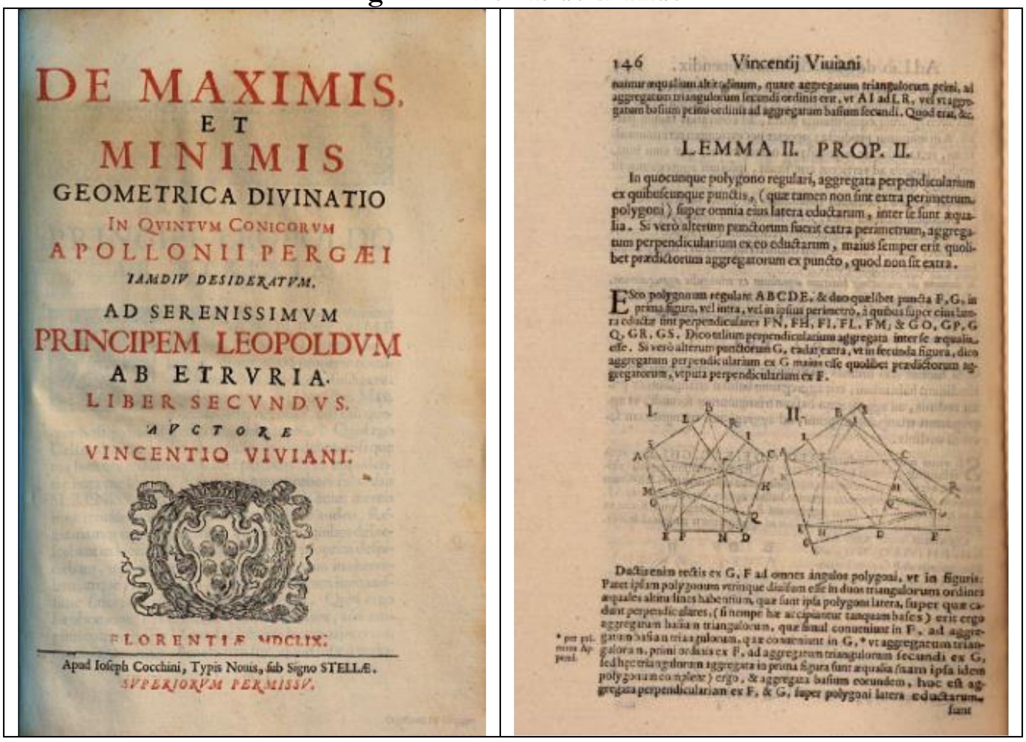
Entre as contribuições disciplinares de Viviani temos que, tentou restaurar o quinto livro dos Elementos de Euclides e reconstruir o conteúdo do quinto livro perdido das Cônicas de Apolônio e De locis solidis de Aristeu. Viviani preparou uma versão italiana do trabalho de Arquimedes sobre a retificação e a quadratura do círculo, e publicou uma tradução italiana de todos os Elementos de Euclides (O'Connor & Robertson, 2009).

O principal interesse de Viviani era a matemática aplicada, por isso, a maioria dos seus estudos foram dirigidos nesse campo de atuação. Alguns fatos importantes a destacar, por exemplo, no ano de 1660, é que por meio de um experimento no qual fez a correlação entre o intervalo de tempo entre o disparo de uma bala de um canhão e o som emitido conseguiu melhorar o cálculo da velocidade do som (O'Connor & Robertson, 2009). A história constata que Viviani constitui-se um bom exemplo do grande valor que se atribuía ao trabalho dos matemáticos na sua época, isto, baseados que entre as tantas descobertas e contribuições intelectuais que nos deixou. Uma destas tantas contribuições foi a exploração de uma curiosa propriedade intrínseca aos triângulos equiláteros

Antes de chegar ao referido teorema, primeiro, precisamos conhecer a precisa do ponto de Fermat, o qual é o ponto dentro ou sobre o triângulo que minimiza a soma das distâncias aos vértices (Alsina & Nelsen, 2010). Quando foi levantado o questionamento desse ponto P, que pode estar na região triangular ou nos lados do triângulo, das condições para minimizar a soma das distâncias perpendiculares aos lados do triângulo. Teve uma possibilidade que ao considerar que o triângulo seja equilátero, a soma das distâncias desde P aos lados do triangulo é constante. Esse resultado é conhecido como teorema de Viviani, em homenagem a Vincenzo Viviani (1622-1703) (Alsina & Nelsen, 2010).

Em outros termos, o teorema de Viviane pode ser enunciado da seguinte maneira: A soma das distâncias perpendiculares a um ponto dentro ou sobre um triângulo equilátero é igual à altura do triângulo. Viviani no seu tratado *De maximis et minimis geometrica divination in quintum Conicorum Apollonii Pergaei* (1659) (Figura 2), o matemático elaborou demonstração, a partir do referido teorema que leva a generalização ao nível mais alto, para qualquer polígono regular ou equiângulo. Por tanto, para todo polígono convexo e regular, a soma das distâncias de um ponto dentro do polígono aos lados do polígono é independente da posição do ponto.

Figura 2 – Folhas do Tratado


DE MAXIMIS, ET MINIMIS GEOMETRICA DIVINATIO IN QVINTVM CONICORVM APOLLONII PERGÆI IAMDIV DESIDERATVM. AD SERENISSIMVM PRINCIPEM LEOPOLDVM AB ETRVRIA. LIBER SECVNDVS. AVCTORE VINCENTIO VIVIANI.

FLORENTIÆ MDCLIX.

Apud Ioseph Cocchini, Typis Nouis, sub Signo STELLÆ. SVPERIORVM PERMISSV.

146 Vincentij Viuiani

LEMMA II. PROP. II.

Fonte: play.google - https://play.google.com/books/reader?id=E9ZdAAAAcAAJ&pg=GBS.PP1&hl=en_US

Tendo aprofundado na origem histórica deste teorema e seus possíveis desdobramentos epistemológico da matemática, no seguinte apartado aprofundaremos os usos do GeoGebra em diferentes cenários.

3 USOS DO GEOGEBRA

Como ferramenta de visualização, o GeoGebra pode ser usado no ensino para oferecer uma perspectiva dinâmica de conceitos e relações matemáticas, a partir de múltiplos registros de representação (Isoda, 2002). Desta forma, os sujeitos têm a possibilidade de "ver" e "explorar" representações dos objetos matemáticos muitas vezes inacessíveis por médio de outros artefatos. No caso, com a ferramenta mover, podem arrastrar um polígono por algum dos elementos constitutivos, de maneira a validar a referida construção ou desvelar as propriedades intrínsecas ao tipo de figura. Desde um ponto de vista do Cálculo, os sujeitos podem modificar a representação geométrica de uma função real por meio de controles deslizantes associados à expressão algébrica deste conceito, o qual faz o efeito de modificações em tempo real, ambos sistemas de representação de maneira simultânea.

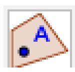
Como ferramenta de construção, este software possui diversas funcionalidades dinâmicas (Castillo & Prieto, 2018) algumas agrupadas em caixas e outras em formato de comandos (Castillo *et al.*, 2020) que permitem, tanto construções de objetos matemáticos segundo a janela do software que se esteja usando, exemplo a janela álgebra, de visualização 2D ou 3D, planilha eletrônica, CAS ou Estatística e Probabilidades.

Como ferramenta de descoberta, o GeoGebra pode favorecer a descoberta de padrões, regularidades ou invariantes matemáticos, por exemplo, invariantes geométricos (Laborde, 1997), nos objetos exibidos nas diferentes janelas ou áreas de trabalho, estas explorações tem a possibilidade de que os sujeitos sejam consciente por meio de atividades com o software que o aproximem ao conhecimento matemático institucionalizado ao longo da História, Espaço e Tempo.

Entendemos que estes modos de usar o GeoGebra permite uma visão mais ampla de como pode ser integrado este software de matemática dinâmica em suas aulas de classes com diferentes propósitos, um desses poderia ser a mediação de atividades baseadas com informações históricas, um exemplo desta se descreve no seguinte tópico.

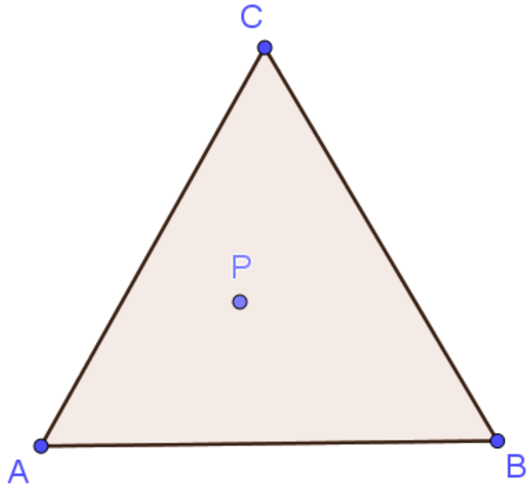
4 O TEOREMA VIVIANI NO GEOGEBRA

Lembremos que o Teorema de Viviani diz que: A soma das distâncias aos lados de um triângulo equilátero de um ponto pertencente ao seu interior ou a seus lados é constante e igual à medida da altura do triângulo (Viviani, 1659). Para explorar o referido teorema, precisa-se de vários objetos matemáticos que representar, entre estes, temos um ΔABC equilátero, um ponto P interior a este polígono, a altura h do mesmo, e três segmentos que convergem em P desde os lados do referido triângulo equilátero.

Nossa abordagem dará início pela construção de um ΔABC equilátero, para isto, vamos na barra de ferramentas e escolhemos polígono regular , essa ferramenta garante que todos os lados do polígono sejam do mesmo comprimento. Após selecionar a ferramenta, se faz clique na janela de visualização do GeoGebra, construindo dois vértices do segmento base para o GeoGebra construir os outros lados do nosso triangulo equilátero. Após determinar a posição dos vértices o *software* abrirá uma janela emergente para que coloque a quantidade de vértices da figura que queremos construir, no nosso foi digitado 3, assim obteremos o triângulo equilátero. Depois, Selecionaremos a na Caixa de Pontos, a ferramenta Ponto em objeto 

, e clique dentro da área do nosso triângulo ABC, temeremos o ponto P (Figura 3), por meio da ferramenta mover, podemos arrastar tanto os vértices ou também o ponto no interior do triângulo, e nessa exploração observamos que o movimento de P se limita à área do triângulo.

Figura 3 – Construção do triângulo equilátero e o ponto $\boldsymbol{P}$



Fonte: Coelho, Teixeira, Castillo e Sánchez (2022)

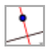
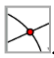
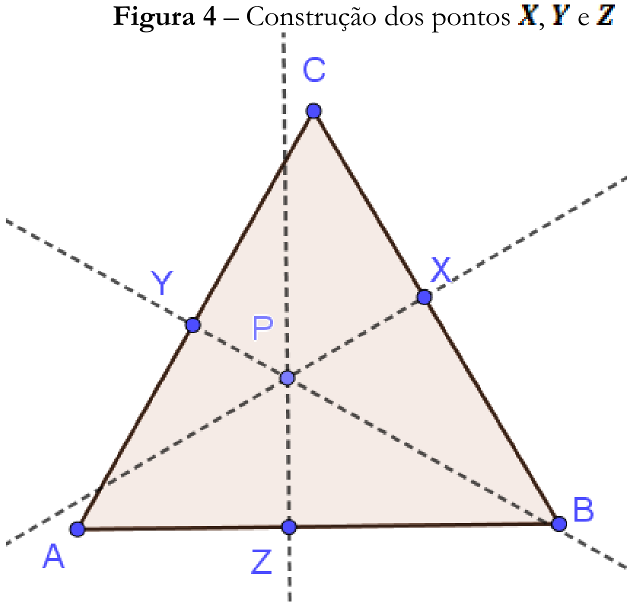
Neste momento, encontraremos os pontos X, Y e Z, situados nos lados a, b e c respectivamente. Para isto, devemos utilizar a ferramenta Reta Perpendicular  clicando no ponto P nos lados a, b e c do referido triângulo. Depois com a ferramenta Interseção de dois objetos , selecionamos as retas criadas com seu respectivo lado de corte do triângulo, determinando assim a localização dos pontos X, Y e Z (Figura 4).

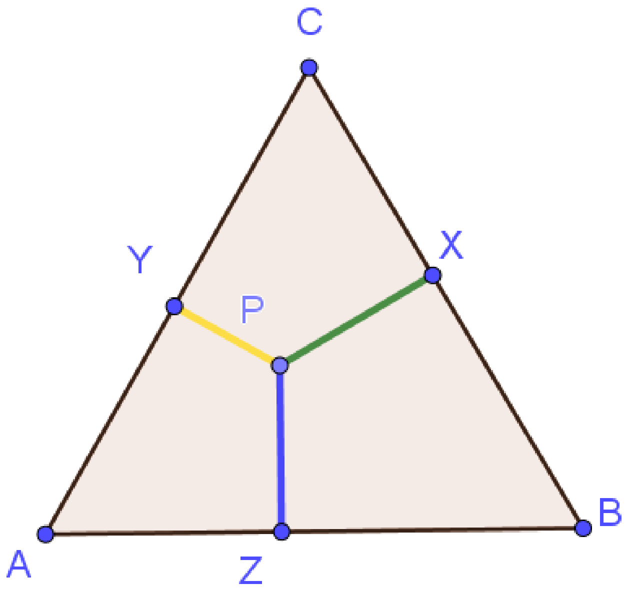
Figura 4 – Construção dos pontos $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{Z}$



Fonte: Coelho, Teixeira, Castillo e Sánchez (2022)

Neste momento será dedicado na construção dos segmentos $\overline{\boldsymbol{PX}}$, $\overline{\boldsymbol{PY}}$ e $\overline{\boldsymbol{PZ}}$, no nosso cenário tendo os extremos deles, só precisamos mediante a ferramenta segmento , construir estes como se observa na figura 5. Destacamos que para uma melhor visualização foi decidido atribuir propriedades de cores diferentes.

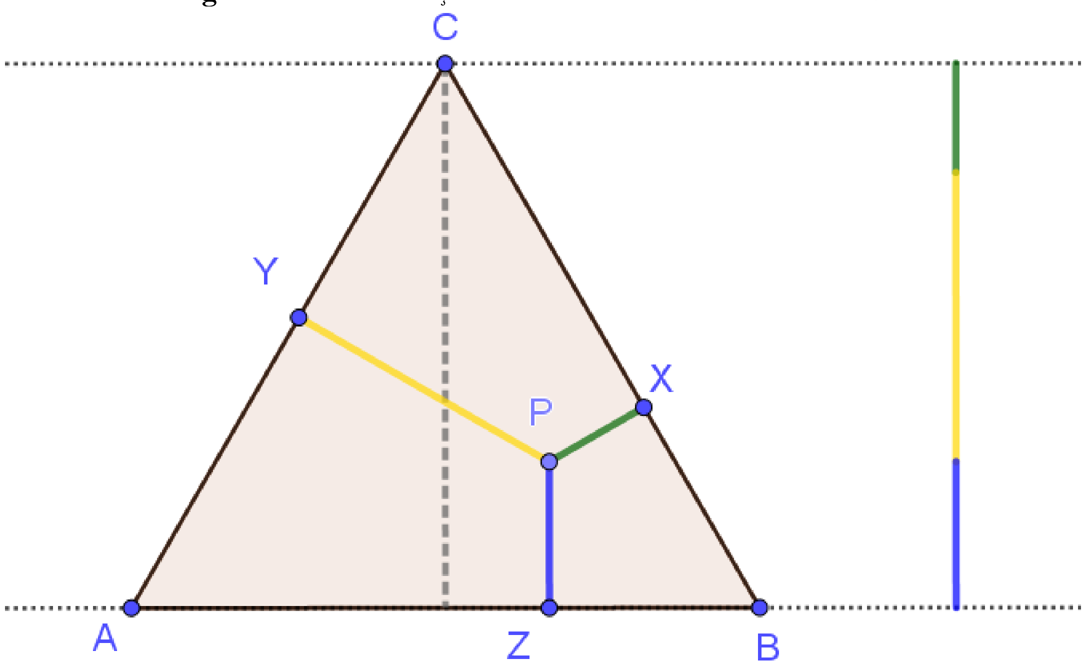
Figura 5 – Construção dos segmentos $\overline{PX}$, $\overline{PY}$ e $\overline{PZ}$



Fonte: Coelho, Teixeira, Castillo e Sánchez (2022)

Finalmente, fazemos a construção do segmento h, que representará nossa altura do triângulo ABC, mediante as ferramentas reta perpendicular e interseção de dois objetos. Destacamos que na figura 6, construímos outros elementos que ajudam a demonstrar este teorema tanto por comprovação de comprimentos como de maneira geométrica e visual.

Figura 6 – Demonstração do Teorema de Viviani no GeoGebra

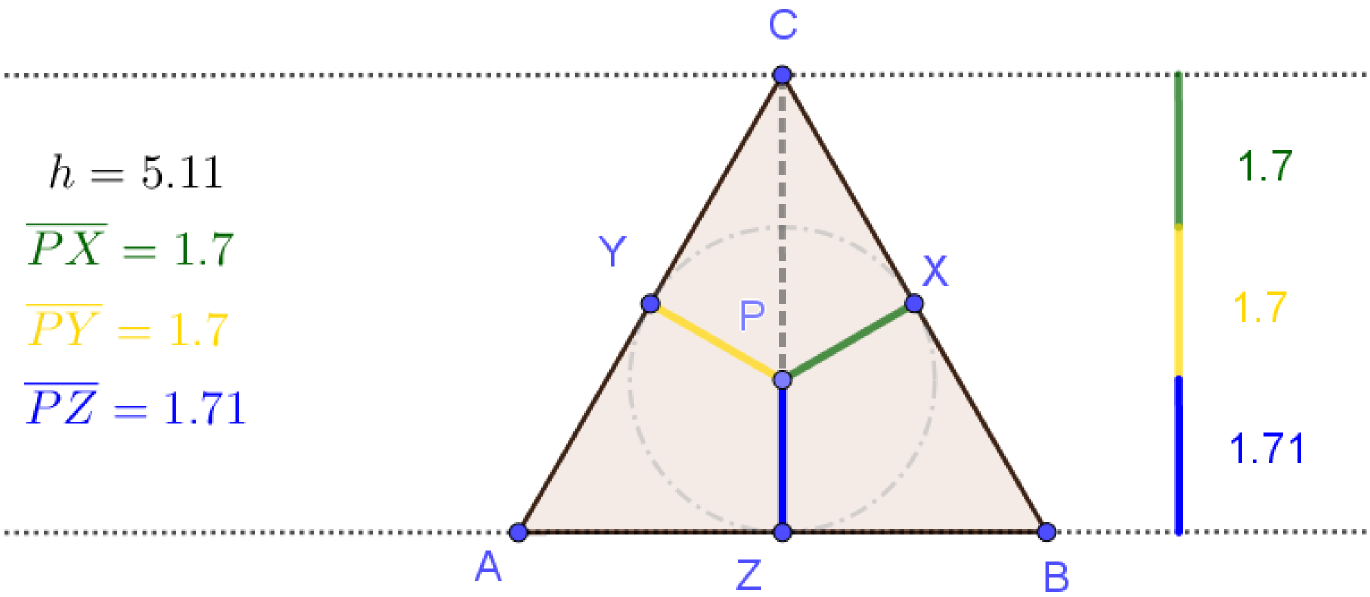


Fonte: Coelho, Teixeira, Castillo e Sánchez (2022)

Até este momento, temos usado o GeoGebra como *ferramenta de construção*. Agora daremos encaminhamento para usar o *software* como uma *ferramenta de visualização* e como *ferramenta de descoberta* na demonstração do teorema de Viviani. Para isto, precisamos plantear algumas questões problematizada, por exemplo: Seria possível $\boldsymbol{P}$ assumir uma localização dentro da região triangular para que as medidas dos segmentos $\overline{\boldsymbol{PX}}$, $\overline{\boldsymbol{PY}}$ e $\overline{\boldsymbol{PZ}}$ sejam iguais? Se possível essa localização, seria um ponto notável?

Nessa exploração por parte dos alunos, os mesmos por meio de arrastar o ponto $\boldsymbol{P}$, vão experimentar diferentes posições desse ponto até chegar num aproximado como se observa na figura 7, com ajuda do professor para orientar a atividade pode dirigir a atenção que essa localização coincide com o um dos pontos notáveis de um triângulo, o incentro. Nesse sentido as questões planteadas foram fechadas, porém, agora surgem outras em abertos, por exemplo, como são os comprimentos desses segmentos se $\boldsymbol{P}$.

Figura 7 –Representação do Teorema de Viviani no GeoGebra.



Fonte: Coelho, Teixeira, Castillo e Sánchez (2022)

Assim, neste tópico foi descrito uma maneira de abordar um fio de muitos outros possíveis a serem considerados como pontos de inspiração para um novo olhar aos conhecimentos gerados pela criatividade humana, tendo como fundamentação informações históricas por médio de fontes primárias. Este olhar diferenciado pelo médio no qual foi materializado, neste caso, um software de matemática dinâmica, o GeoGebra. Destacamos que esta abordagem se inspira um pouco do movimento *Proof Without Words*, ou Prova Sem Palavras (Alsina & Nelsen, 2010), outros exemplos, para demonstrar este teorema que poderão ser dinamizados com GeoGebra ou outros softwares de Geometria dinâmica, é por Cevianas congruentes (Nicollier, 2016) ou por Vetores (Samelson, 2003).

Outras experiências semelhantes à esta, descrevem que o uso do GeoGebra em conjunto a atividades baseadas na História da Matemática, tem as seguintes possibilidades: Visualizar conceitos matemáticos históricos; Concretizar conceitos matemáticos históricos; Compreender conceitualmente a história da matemática; Superar as dificuldades em aprender a história da matemática, desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos; como também desenvolver o pensamento matemático (Zengin, 2018)

Para finalizar este tópico, colocamos no cenário a seguinte chamada de atenção que diz ao respeito da "interação entre fontes originais e ferramentas digitais não é suficiente por si só; requer atenção didática tanto dos professores quanto dos projetistas de tarefas" (Thomsen & Jankvist, 2019, p. 09). Com isto, entendemos, que não é usar a história da matemática e as tecnologias digitais de maneira aleatória, ao contrário, esse uso dever ser sempre com um propósito, com uma intencionalidade de ensino por parte do professor aos estudantes.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho, que se subscreve como uma produção de um campo de uma tendência que está emergindo para pesquisar, estudar e dialogar sobre as possibilidades do uso da História da Matemática (HM) e das Tecnologias Digitais (TD) para o Ensino. Neste sentido, conseguimos descrever as possibilidades de utilizar o *software* GeoGebra para um novo ponto de vista da demonstração do Teorema de Viviani, nosso intensão é promover uma educação ativa para estudantes do ensino médio a partir do uso de tratados de matemática antigos.

Para isto, primeiramente foi aprofundando os aspectos biográficos de Vincenzo Viviani (1622 -1703), e nesse percurso fomos compreendendo como foi atribuído esse teorema a este matemático. Além disso, conseguimos compreender como Viviani, elevou o nível de sofisticação de tal afirmação para todo polígono regular. É assim, como nesse movimento vamos concretizando conceitos matemáticos históricos, por médio dessa atividade de investigação histórica em sala de aula e que é potencializada com o uso das tecnologias digitais, como o GeoGebra.

Neste trabalho foram concretizadas algumas formas de usar o GeoGebra para mobilizar conteúdos matemáticos, como ferramenta de construção, ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático, como uma ferramenta de visualização e como ferramenta de descoberta na demonstração do teorema de Viviani. Tais formas, por um lado, consideramos que podem amplificar as capacidades cognitivas do raciocínio na hora da exploração, generalização e experimentação na demonstração de teoremas da geometria euclidiana plana, como no nosso caso o Teorema de Viviani.

Consideramos isto, devido ao fato de que na elaboração desta proposta as diferentes formas de usar o GeoGebra possibilitou visualizar tanto casos particulares, como também abordar questões sobre o a variação dos comprimentos dos segmentos em função da localização do ponto $\boldsymbol{P}$ na região triangular. Neste caso por meio desta tecnologia digital conseguimos ampliar já as informações históricas sobre este teorema e gerar assim novas questões que podem ser exploradas na sala de aula da Educação Básica, especificamente no Ensino médio.

Para finalizar, acreditamos que esta proposta proporcionaria uma forma de motivar aos alunos a serem ativos na continuidade da construção deste capital intelectual que se chama a matemática, claro, sempre com a ajuda e mediação do professor na atividade de ensino e aprendizagem.

Conflitos de interesses

Os autores declaram que não há conflitos de interesse. Todos os autores estão cientes da submissão do artigo.

Contribuições dos autores

Iara Martins Coelho: Autora correspondente, contribuinte na escrita, correção e realização do recurso com GeoGebra; Lucas Santos Teixeira: contribuinte na escrita, correção e realização do recurso com GeoGebra; Luis Andrés Castillo Bracho: Contribuinte na escrita, orientador e responsável pelas correções e direcionamentos; Ivonne Coromoto Sánchez Sánchez: contribuinte na escrita e realização do recurso com GeoGebra

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas do Pará (FAPESPA) e da Universidade Federal do Pará.

REFERÊNCIAS

Alsina, C., & Nelsen, R. (2010). *Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics*. American Mathematical Society. https://doi.org/10.5948/UPO9781614442011

Alves, V. B. (2019). *Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred* [Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)]. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará.

Baki, A., & Guven, B. (2008). Khayyam with Cabri: experiences of pre-service mathematics teachers with Khayyam's solution of cubic equations in dynamic geometry environment. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *28*(1), 1–9. https://doi.org/10.1093/teamat/hrp001

Carvalho, J. B. (2021). Uma revisão sistemática sobre metodologias ativas no ensino da matemática: aprendizagem ativa, protagonismo dos estudantes. Journal of Education Science and Health, 1(4), 1–13. https://doi.org/10.52832/jesh.v1i4.47

Brito da Silva, F. H., & Batista, A. N. de S. (2022). Aspectos matemáticos e materiais da fabricação do báculo de Petrus Ramus frente a concepção de licenciandos em Matemática. *Boletim Cearense de Educação e História Da Matemática*, *9*(26), 165–180. https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8031

Castillo, L. A., Gutiérrez, R. E., & Sánchez, I. C. (2020). O uso do comando sequência na Elaboração de Simuladores com o software GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *9*(3), 106–119. https://doi.org/10.23925/2020.v9i3p106-119

Castillo, L. A., & Prieto, J. L. (2018). El uso de comandos y guiones en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *UNION*, *52*, 250–262.

Dennis, D., & Confrey, J. (1997). Drawing logarithmic curves with Geometer's sketchpad: a method inspired by historical sources. In J. R. King & D. Schattschneider (Eds.), *Geometry turned on!* (pp. 147–156). MAA.

Hašek, R., & Zahradník, J. (2015). Study of historical geometric problems by means of CAS and DGS. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *22*(2), 53–58. https://doi.org/10.1564/tme_v22.2.02

Isoda, M. (2002). Inquiring mathematics with history and software. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education. New ICMI Study Series* (pp. 351–358). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_10

Isoda, M., & Aoyama, K. (2000). The change of belief in mathematics via exploring historical text with technology in the case of undergraduates. In W.-C. Yang, S.-C. Chu, & J.-C. Chuan (Eds.), *Proceeding of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 132–141).

Jankvist, U. T. (2014). On the Use of Primary Sources in the Teaching and Learning of Mathematics. In *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching* (pp. 873–908). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7654-8_27

Jankvist, U. T., & Geraniou, E. (2019). Digital technologies as a way of making original sources more accessible to students. In E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 107–130). Metropolitan University.

Jankvist, U. T., & Geraniou, E. (2021). "Whiteboxing" the Content of a Formal Mathematical Text in a Dynamic Geometry Environment. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *7*(2), 222–246. https://doi.org/10.1007/s40751-021-00088-6

Junior, F. M. da S., Santos, A. G. dos, & Pereira, A. C. C. (2022). Um primeiro olhar sobre A short Treatise of the Description of the Sector. *Boletim Cearense de Educação e História Da Matemática*, *9*(26), 374–385. https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8034

Kántor, T., & Tóth, A. (2016). Teaching of old historical mathematics problems with ICT tools. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *14*(1), 13–24. https://doi.org/10.5485/TMCS.2016.0400

Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. In L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (pp. 33–48). "Una empresa docente" e Grupo editorial iberoamérica.

Maanen, J. Van. (1997). New Maths May Profit from Old Methods. *For the Learning of Mathematics*, *17*(2), 39–46. https://doi.org/10.2307/40248239

Meadows, M., & Caniglia, J. (2021). That Was Then…This is Now: Utilizing the History of Mathematics and Dynamic Geometry Software. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *9*(2), 198–212. https://doi.org/10.46328/ijemst.1106

Mendes, I. A. (2009). *Investigação Histórica no Ensino da Matemática*. Editora Ciência Moderna.

Mendes, I. A. (2015). *História da matemática no ensino: Entre trajetórias profissionais, epistemológicas e pesquisas* (1a ed.). Livraria da Fisica.

Nicollier, G. (2016). Proof Without Words: Viviani for Congruent Cevians. *Mathematics Magazine*, *89*(3), 216–217. https://doi.org/10.4169/math.mag.89.3.216

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2009). Vincenzo Viviani. Obtido em https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viviani

Pereira, A. C. C. (Ed.). (2022). *Ensino de matemática: conversas didáticas a partir de tratados históricos* (1st ed.). EdUECE.

Pereira, A. C. C., & Alves, V. B. (2019). A reconstrução dos círculos de proporção no geogebra como uma atividade para a mobilização de conhecimentos matemáticos. *Revista História Da Matemática Para Professores*, *5*, 19–

28.

Pontes, L. M., Batista, A. N. de S., & Pereira, A. C. C. (2021). A inserção de textos originais na disciplina de História da Matemática a partir de um problema do documento Sea Island Mathematical Manual. *Revemop*, *3*, e202101. https://doi.org/10.33532/revemop.e202101

Samelson, H. (2003). Proof without Words: Viviani's Theorem with Vectors. *Mathematics Magazine*, *76*(3), 225. https://doi.org/10.2307/3219327

Sánchez, I. C., & Castillo, L. A. (2022). Uma antiga demonstração do teorema de Pitágoras desde a perspectiva da geometria dinâmica. *Boletim Cearense de Educação e História Da Matemática*, *9*(26), 214–226. https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8030

Sousa, G. C. de. (2021). Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. *REMATEC*, *16*(37), 140–159. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p140-159.id310

Thomsen, M. (2021). Working with Euclid's geometry in GeoGebra – experiencing embedded discourses. *Bringing Nordic Mathematics Education into the Future: Proceedings of NORMA 20, The Ninth Nordic Conference on Mathematics Education*, *2020*, 257–265.

Thomsen, M., & Jankvist, U. T. (2019). Mathematical thinking in the interplay between historical original sources and GeoGebra. In U. T. Jankvist, A. Clark-Wilson, H.-G. Weigand, R. Elicer, & M. Thomsen (Eds.), *ICTMT-15 Book of accepted contributions: 15th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – Making and Strengthening "Connections and Connectivity" (C&C) for Teaching Mathematics with Technology* (pp. 283– 291). Danish School of Education.

Viviani, V. (1659). *De maximis et minimis geometrica divination in quintum Conicorum Apollonii Pergaei.*

Zengin, Y. (2018). Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(7), 1083–1098. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431850